ΜΕΘΟΔΟΙ R-K

19/12/19

Παρ 10/1 12-1

Πεμ 16/1 12-15
πρόοδος

$$(1): \begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$(2): \text{RK} \begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) & , n = 0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

(7) (6)

Πρόταση: Έστω το ΠΑΤ(1), η f είναι συνεχής και ισχύει η Lipschitz, $h < \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = L \max \sum_j |a_{ij}|$. Τότε το σύστημα την $y^{n,i} = y^n + h \sum a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$ λύνεται μονοσήμαντα ως προς τα $y^{n,i}$.

(ΝΕΑ ΥΛΗ)

Πρόταση (Ευστάθεια των R-K μεθόδων)

Έστω μια μέθοδος R-K, πληρούνται οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, και έστω οι προσεγγίσεις y^i, $i = 0, 1, \dots, N$ που ορίζονται απο το (2). Επίσης θεωρούμε τις ποσότητες $z^{n,i}$, z^n, $0 \le n \le N$ τ.ω

$$\begin{cases} z^0 = z_0 \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) & , i = 1, \dots, q, \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n & , n = 0, 1, \dots, N \end{cases}$$

όπου ρ^n, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, δεδομένοι αριθμοί, τότε υπάρχουν σταθερές C_1, C_2, ανεξάρτητες του h τ.ω:

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_n |\rho^n|$$

: η διαφορά, το σφάλμα που παίρνω απο τη μια μέθοδο και την άλλη

Παρατήρηση

(1) Όταν $\rho^n = 0$, τότε έχουμε αποτέλεσμα για την ευστάθεια της μεθόδου R-K.

Δηλ.: $\max_n |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0|$

(2) Όπου: $C_1 = e^{c'(b-a)}$, $c' = LC \sum_{i=1}^{q} |b_i|$

$$C_2 = \frac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'}$$

Ανεξάρτητα του h, εξαρτ. απο το προβλ, f, $[a,b]$

(η σταθ. δεν εξ. απο τη διαμέριση (.. h) αλλά απο τα δεδομένα του εκάστοτε προβλήματος)

(π.χ. είναι η R-K 4. ευσταθής, παράγει φραγμένες προσεγγίσεις;)

↳ θα θεωρήσω ότι η διαφορα ρ^n (δεν υφίσταται), όταν $\frac{C_2}{h} \max |\rho^n| \to 0$ τότε παράγει φρ. προσ)

Σφάλμα Συνέπειας
(Τοπικό σφάλμα)

$$y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Τα $y^{n,i}$ είναι καλώς ορισμένα (= υπάρχουν και είναι μοναδικά) για $h\gamma < 1$. Τότε

$$\underset{\text{τ.σ}}{\delta^n} = \underbrace{\left[y(t^n) + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right]}_{y^{n+1} \text{ (αριθμ. τιμή μεθ. RK)}} - \underbrace{y(t^{n+1})}_{\text{αναλ. τιμή της } y}$$

(ξεκινάω απο το σημειο t^n κάνω ένα σημα και γνωρίζω την αναλυτικη λυση στο t^{n+1}..)

<u>π.χ</u> βρες το σφαλμα της μεθοδου αν κάνεις 1 βήμα με τη μέθοδο RK4 (σύγκρινε τη διαφορά)

• <u>Τάξη ακρίβειας RK</u> (ή τάξη της RK)

Λέγεται ο μεγαλύτερος εκθέτης p, για τον οποίο για όλα τα προβλήματα που θεωρούμε $\exists\ \tilde{c}$ που εξαρτάται απο το πρόβλημα (δηλ. την f και την y) αλλά είναι ανεξαρτητη του βήματος h, τ.ω

(ορισμός)

$$\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \tilde{c}\, h^{p+1} \quad : (3)$$

(άρα τάξης $p+1$)

<u>Θεώρημα</u>: (Εκτιμηση σφάλματος της RK)
(Ολικό σφάλμα της μεθ. RK).

Έστω ότι η f είναι συνεχής και ικανοποιει την συνθήκη Lipschitz, οι f και y είναι ομαλές συναρτήσεις. Με $\gamma = L \max\limits_{1\le i\le q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$, έστω $h_0>0$ τ.ω. $\gamma h_0<1$ κ' $0<h\le h_0$. Θεωρούμε τη μεθ. RK με γενικό τύπο (2) κ' τάξη ακρίβειας p, που δίνεται απο την (3) τότε ισχύει ότι

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \frac{\tilde{c}}{c'}\left[e^{c'(b-a)}-1\right] h^p$$

όπου οι σταθερές $\tilde{c}, c'$, είναι ανεξαρτ. του h
και $c' = Lc\sum_{i=1}^{q}|b_i|$

<u>Απόδειξη</u>: Τα ενδοιάμεσα βήματα δίνονται από την έκφραση:

$$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

$$y(t^{n+1}) = y^{n+1} - \delta^n = \left[y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})\right] - \delta^n$$

από προηγ. πρόταση:

$$\max_n |y(t^n) - y^n| \le C_1|y^0 - y(a)| + \frac{c}{h}\max_n|\delta^n| \Rightarrow$$

το $C_1|y^0 - y(a)|$ είναι μηδέν γιατί τόσο η αναλυτική όσο και η αριθμητική λύση ξεκινάνε από το ίδιο σημείο

$$\Rightarrow \max_n |y(t^n) - y^n| \le \frac{C_2}{h}\max_n|\delta^n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_n |y(t^n) - y^n| \le \frac{C_2}{h}\max_n|\delta^n| \le \frac{C_2}{h}\tilde{C} h^{p+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_n |y(t^n) - y^n| \le \tilde{C} C_2 h^p$$ (τάξης p, εσω ολ. σφ.)

$$C_2 = \frac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'}, \quad c' = Lc\sum_{i=1}^{q}|b_i| \quad \square$$

(RK4: ολ. σφ. 4 — αφού τάξης ακρίβειας 4 — και τοπ. σφάλμα 5ης τάξης)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

SOS

Ασκ. 1: Μια μεθ. R-K είναι τάξης ακρίβειας $p \geq 1 \iff \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$. Τότε η μεθ. RK λέγεται συνεπής. (Είναι$^{\text{π.χ}}$ η RK4 συνεπής;)

Απάντηση (π.χ)

α $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, $\sum b_i = 1$ είναι τα b_i για $i=1,\dots,4$

αρα είναι συνεπής.

Απάντηση ασκ 1

$$\delta^n = [y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})] - y(t^{n+1})$$

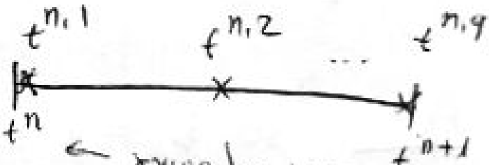
- Θέλουμε νδο $O(h^2) = \delta^n$ (εφοσον $p \geq 1$ τοτε δ^n τουλ. h^2)

$\iff b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$

$$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad 1 \leq i \leq q \quad \text{τότε}$$

$$\left.\begin{aligned} y^{n,i} &= y(t^n) + O(h) \\ t^{n,i} &= t^n + O(h) \end{aligned}\right\} \text{οπότε απο αναπτ. Taylor:}$$

$$f(t^{n,i}, y^{n,i}) = f(t^n, y^n) + O(h)$$



γνωρίζω τους εδω την αναλυτική και θελω να αναζω τους συναρτ. υπολ. της f στο σημείο t^n

αρα
$$\delta^n = [y(t^n) + h\sum_i b_i (f(t^n, y^n) + O(h))] - y(t^{n+1}) \overset{\text{taylor}}{=}$$

$$= y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^n, y^n) + h\sum_i b_i O(h) -$$

$$- [y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^2)] =$$

(Υποθ το $h < \frac{1}{8}$)

$$= \underset{\neq 0}{h}\left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\right)\underset{\neq 0}{y'(t^n)} + O(h^2)$$

(αν $y' = 0$ το f μηδ. άρα $y' \neq 0$)

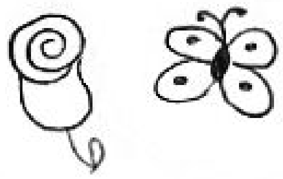
άρα αναγκαστικά $\left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\right) = 0$
για να διατηρήσω ότι το σφάλμα είναι τάξης του h^2 ($O(h^2)$)

Άρα $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$

Αντίστροφα, αν $\sum b_i = 1$ τότε $p \geq 1$.

(γενικά το 1ο που εξετάζω σε ασκ. είναι αν είναι συνεπής)

όσο μεγαλύτερο το h... τόσο μικρότερο σφάλμα



sos

Άσκηση 2: Έστω η μεθ RK με μητρώο:

$$\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

, ν.δ.ο. έχει τάξη ακριβ. ,ακριβώς 1 ($p = 1$)

Απ.: Το $b_1 = 1$ άρα είναι συνεπής δηλ $p \geq 1$

$$\begin{cases} Y^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f\left(t^n + \frac{h}{3}, Y^{n,1}\right), \quad t^{n,1} = t^n + \frac{h}{3} \\ \delta^n = y^{n+1} - y(t^{n+1}) = \left[y(t^n) + h f\left(t^n + \frac{h}{3}, Y^{n,1}\right)\right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το $y^{n,1} = y(t^n) + O(h)$
και $t^{n,1} = t^n + O(h)$

$$\Rightarrow f(t^n + \tfrac{h}{3}, y^{n,1}) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$$

← αντικαθ. από Taylor

Δηλ. $\delta^n = \left[y(t^n) + h\left(f(t^n, y(t^n)) + O(h)\right)\right] - y(t^{n+1}) \Rightarrow$

άρα έχω $h \cdot O(h)$ άρα $O(h^2)$

$$\Rightarrow \delta^n = \left[y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + O(h^2)\right] - \left[y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^2)\right] \Rightarrow \delta^n = O(h^2)$$

$\Rightarrow p \geq 1$ άρα p είναι 1 ή μεγαλύτερο δηλ. μπορεί να είναι και 2.

Για να δείξω ότι η τάξη δεν είναι μεγαλύτερη του 1 αλλά ακριβώς 1, δείχνουμε ένα (παραδ) ΠΑΤ.:

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

αναλ. λύση $y(t) = t^2$

(έχω $f(t)$ όχι $f(t,y)$)

Τότε $\delta^n = \underbrace{\left[y(t^n) + h f(t^n + \tfrac{h}{3})\right]}_{\text{αριθμ. βήμα με MRK}} - \underbrace{y(t^{n+1})}_{\text{αναλυτική λύση}}$

$$= \left[y(t^n) + 2h(t^n + \tfrac{h}{3})\right] - (t^n + h)^2 \Rightarrow$$

άρα $\delta^n = (t^n)^2 + 2h(t^n + \frac{h}{3}) - (t^n + h)^2 = -\frac{1}{3}h^2 \Rightarrow$

$|\delta^n| = \frac{h^2}{3}$

Επομένως η τάξη ακρίβειας της MRK είναι το πολύ 1 $(q \le 1)$ άρα $p=1$.

(για το σπίτι να τσεκάρω: σελ. 112-118 λυμένες + ασκ. 3.3 βιβλίου)
sos

Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας

Άμεσες RK μεθόδους:

$$S=\{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1\}$$

Η συνάρτηση ευστάθειας: για την Euler (άμεση)

- $r(z) = 1+z$
- $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ← πεπλ. Euler
- $r(z) = \dfrac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$ ← μεθ. τραπ. κ' Μέσου

Για άμεση RK η συνάρτηση ευστάθειας είναι:

$$r(z) = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!} \dots + \frac{z^p}{p!}$$

είναι πολ/μο p-βαθμού.

p: τάξη ακρ. της μRK.